MANUEL A. BLANCO

La demanda de empleo y horas con coste de ajuste

I. INTRODUCCION

Es ampliamente reconocido que la adaptación del empleo a los cambios en el output no tiene lugar de manera instantánea, sino que, por el contrario, está sujeta a un proceso de ajuste escalonado y gradual. La obtención —con elocuente generalidad— de valores para la elasticidad-output a corto plazo del empleo muy inferiores a la unidad constituye la principal confirmación empírica de este hecho.

Aunque el hallazgo repetido de bajos valores para la elasticidad-output a corto plazo del empleo ha sido a veces esgrimido como una refutación de la ley de la productividad marginal decreciente del factor trabajo, varios autores —entre los que se encuentran *Oi, W.* (1962), *Kuh, E.* (1965), *Rosen, S.* (1968, 1969), *Cohen, R. M.* y *Hickman, B. G.* (1970, 1976) y, sobre todo, *Nadiri, M. I.* y *Rosen, S.* (1969, 1973, 1974)— han mostrado claramente que este comportamiento del empleo no es, en realidad, sino el reflejo de otro fenómeno suficientemente comprobado: el de las elevadas elasticidades que muestran los tipos de utilización de la mano de obra, también a corto plazo, con respecto al output. Así, los tipos de utilización del empleo —y, en general, los tipos de utilización de los «stocks» de factores— se convierten, en los más perfeccionados tratamientos de la demanda derivada, en la pieza clave que permite llevar a cabo la adaptación a largo plazo de la firma sin que la especificación de procesos parciales de ajuste para los stocks de factores —o para los flujos de los mismos bajo el supuesto de proporcionalidad de las relaciones stock-flujo— implique inconsistencias de tipo lógico.[1]

1. La inconsistencia en que se incurre al especificar un proceso parcial de ajuste para el flujo de servicios de un factor cuando se supone que el flujo de servicios de los restantes factores permanece invariable, ha sido puesto de manifiesto con claridad, para el caso del empleo, por Fair (*Fair, R. C.* 1969). Alusiones a esta inconsistencia, por lo que respecta a los modelos basados en la teoría del acelerador de la inversión, pueden también encontrarse en *Knox, A. D.* (1952) y *Meade, J. E.* (1971).

Las razones por las cuales deberíamos ciertamente esperar una mayor velocidad de ajuste para el tipo de utilización del empleo que para el stock del mismo no han sido, sin embargo, suficientemente fundamentadas desde un punto de vista teórico. *Oi, W.* (1962), *Fair, R. C.* (1969), *Rosen, S.* (1968, 1969) y *Nadiri, M. I.* y *Rosen, S.* (1969, 1973, 1974), han sugerido hipótesis explicativas interesantes pero todas ellas tienen un carácter eminentemente «ad hoc» en el sentido de que el contrapuesto comportamiento dinámico empíricamente observado para la tasa de utilización y para el stock de empleo en modo alguno puede inferirse como una consecuencia necesaria de los modelos —esencialmente estáticos— propuestos por estos autores. Más acertadamente, *Tinsley, P. A.* (1971) y *Wickens, M. R.* (1974) han enfocado el problema desde la perspectiva, mucho más sólida, que proporciona la teoría de los costes de ajuste, pero la fórmula de optimización seleccionada en estos casos no permite derivar rigurosamente las propiedades fundamentales del fenómeno que se pretende explicar.[2]

En este artículo nosotros mostraremos que si los empresarios tratan de minimizar los costes descontados del factor trabajo sobre un horizonte infinito, la presencia de costes de ajuste asociados al cambio en el stock de empleo implica la generación de un sendero de expansión para éste que, necesariamente, ha de seguir un perfil temporal contrario al de la tasa de utilización de la mano de obra. Dadas las hipótesis de partida que más adelante se mencionan, la aplicación del criterio de minimización de costes garantiza la obtención de este resultado.

II. LA DINAMICA DEL AJUSTE DEL STOCK DE EMPLEO Y DE LA TASA DE UTILIZACION

Nuestras hipótesis de partida son las siguientes: I) la firma está dotada con un determinado stock de capital que proporciona un flujo de servicios constante; II) en ausencia de progreso tecnológico, el out-

2. Esto es particularmente cierto en el caso de Wickens —ver *Wickens, M. R.* (1974)—, quien llega a conclusiones muy similares a las que se presentan en este artículo operando con un modelo de maximización de beneficios. Conviene señalar, no obstante, que en los modelos de maximización de beneficios el output es endógeno —véanse al respecto las críticas de Junancar y Loranger a Jorgenson en *Junankar,* (1972) y *Loranger, J. G.* (1974)—, por lo cual, los senderos óptimos de expansión que se obtienen para el empleo y para las tasas de utilización implican también, de hecho, la obtención de un sendero óptimo de expansión para el output. En estas condiciones es evidente, por tanto, que la tasa de utilización del empleo —que en el modelo de Wickens es independiente del precio del output— puede permanecer constante durante el proceso de ajuste del stock de empleo —y correspondientemente del output— al nuevo nivel óptimo inducido por un cambio en el precio por lo cual ninguna conclusión relacionada con el problema que nos ocupa, puede ser obtenida a partir de este esquema. Es en base a este argumento que afirmamos que la explicación teórica dada por Wickens, aun estando fundamentada en la teoría de los costes de ajuste, es también «ad hoc».

put de la firma sólo puede ser aumentado - disminuido - aumentando - disminuyendo el flujo de servicios del factor trabajo; III) tanto el tipo de salario básico como otros costes fijos en los que la firma incurre por persona empleada están totalmente fuera del control de la misma; IV) no obstante III), el salario medio por persona empleada que la firma haya finalmente de satisfacer dependerá de la política que ésta adopte con respecto a la tasa de utilización de la mano de obra; V) el cambio en el stock de empleo está sujeto a costes de ajuste; VI) el cambio en la tasa de utilización no está sujeto a costes de ajuste, de manera que esta última es el único factor perfectamente variable para la firma; VII) el stock de empleo se reduce de acuerdo con una «tasa de retiro» constante; VIII) la función de producción es continua y sus primeras y segundas derivadas son también continuas; IX) los empresarios trata de minimizar los costes del factor trabajo descontados a una tasa constante sobre un horizonte temporal infinito.

Asumimos también:

a) Que la firma está sujeta a la siguiente función de producción:

$$Q_t = B\,(N_t \cdot h_t)^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{1}$$

donde Q_t es el flujo de output por unidad de tiempo y donde $N_t \cdot h_t$ —flujo de servicios del factor trabajo— es el producto del «stock» de empleo, N_t, por su tasa de utilización por unidad de tiempo, h_t, y;

b) que existe una «función de costes» por persona empleada definida en la forma:

$$c_t = f_t + w_t^0 + w_t^0 \cdot b \cdot h_t^{\sigma} \tag{2}$$

donde c_t es el coste total del factor trabajo por persona, f_t el coste fijo por persona empleada que se supone independiente del salario básico, w_t^0 el tipo de salario básico y donde $b > 1$ y $\sigma > 1$ son parámetros dados. Bajo estas dos últimas restricciones, la ecuación (2) expresa, por tanto, que el coste total por persona empleada es una función estrictamente convexa de su tasa de utilización, y constituye una aproximación, con primeras y segundas derivadas continuas, a un supuesto esquema «general» de pagos compuesto por una parte fija —$(f_t + w^o{}_t)$— y una parte variable —dependiente de la tasa de utilización— caracterizada por la existencia de tipos marginales de retribución que crecen de manera discreta una vez que la tasa de utilización de la mano de obra sobrepasa un cierto umbral mínimo.[3]

3. Funciones de costes iguales o similares a ésta, han sido empleadas, entre otros, por *Ball, R. J.* y *St. Cyr, E. B. A.* (1966), *Tinsley, P. A.* (1971), *Wickens, M. R.* (1974) y *Blanco Losada, M. A.* (1976).

Si designamos por n la contratación bruta por período; por F los costes fijos asociados al stock de capital; por δ la tasa de retiro; por r el tipo de descuento y, finalmente, por $A = \gamma\dot{N}_t^2/2$ la «función de costes de ajuste» asociada al cambio en el stock de empleo, el problema de decisión de la firma puede plantearse, en términos del cálculo de variaciones así: Hallar las funciones N(t) y h(t) que minimizan, para un nivel de producción dado Q_t^0, el valor de la integral:

$$\Omega^*(0) = \int^\infty H \cdot dt$$

donde el Hamiltoniano H adopta la forma[4]:

$$\begin{aligned} &H(\dot{N}_t, N_t\, h_t, n_t) = \\ &= e_{-}^{rt} \cdot \{(f_t + w_t^0 + w_t^0 \cdot b \cdot h_t^\sigma)N_t + \gamma\dot{N}_t^2/2 + F_t\} + \\ &+ \lambda_t^0 \cdot (Q_t^0 - B\,(N_t \cdot h_t)^\alpha) + \lambda_t^1(\dot{N}_t - n_t + \delta N_t) \end{aligned}$$

Las condiciones necesarias para la existencia de un óptimo —mínimo— vienen dadas por las ecuaciones de Euler:

$$\frac{d\,(\delta H/\delta\dot{N}_t)}{dt} - \frac{\delta H}{\delta \dot{N}_t} = \frac{d\,(e^{-rt} \cdot \gamma \cdot \dot{N}_t + \lambda_t^1)}{dt} - \tag{3.a}$$

$$- \{ e^{-rt} \cdot (f_t + w_t^0 + w_t^0 \cdot b \cdot h_t^\sigma)N_t - \lambda_t^0 \cdot \alpha \cdot \frac{Q_t^0}{N_t} + \lambda_t^1 \cdot \delta \} = 0$$

$$\frac{\delta H}{\delta h_t} = e^{-rt} \cdot w_t^0 \cdot b \cdot \sigma \cdot h_t^{\sigma-1} \cdot N_t - \lambda_t^0 \cdot \alpha \cdot \frac{Q_t^0}{h_t} = 0 \tag{3.b}$$

$$\frac{\delta H}{\varsigma n_t} = -\lambda_t^1 = 0 \tag{3.c}$$

$$n_t = \dot{N}_t + \delta N_t \tag{3.d}$$

$$B \cdot (N_t \cdot h_t)^\alpha \tag{3.e}$$

junto con las condiciones de transversalidad y Legendre:

$$\text{(3.f)} \quad \lim_{t\to\infty} H_{\dot{N}} = e^{-rt} \cdot \gamma \cdot \dot{N}_t + \lambda_t^1 = 0 \tag{3.f}$$

$$H_{\dot{N}\dot{N}} = e^{-rt} \cdot \gamma \geq 0 \tag{3.g}$$

4. Por comodidad hacemos N (t) = N_t, h (t) = h_t, etc., de acuerdo con la simbología inicialmente introducida en el texto.

Teniendo en cuenta que $\lambda_t^1 = 0$, la condición (3.f) exige que $N_t \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir que exista una solución de equilibrio estacionario para N_t. Por otra parte, si asumimos que la condición de Legendre se cumple en términos de estricta desigualdad —es decir, si suponemos que $\gamma > 0$— se satisfacen también las condiciones suficientes, lo cual significa que las funciones admisibles para N_t y h_t que minimizan Ω son también únicas.[5]

Realizando las sustituciones apropiadas, el sistema formado por las ecuaciones (3.a) - (3.e) se reduce finalmente al siguiente:

$$e^{-rt} \cdot \gamma \cdot \ddot{N}_t - r \cdot e^{-rt} \cdot \gamma \cdot \dot{N}_t - e^{-rt}(f_t + w_t^0 + w_t^0 \cdot b \cdot h_t^\sigma) + \\ + \lambda_t^0 \cdot \alpha \cdot \frac{Q_t^0}{N_t} = 0 \tag{4.a}$$

$$e^{-rt} \cdot w_t^0 \cdot b \cdot \sigma \cdot h_t^{\sigma-1} \cdot N_t = \lambda_t^0 \cdot \alpha \frac{Q_t^0}{h_t} \tag{4.b}$$

$$Q_t^0 = B(N_t \cdot h_t)^\alpha \tag{4.c}$$

Haciendo $\ddot{N}_t = 0$ y $\dot{N}_t = 0$, las soluciones estacionarias o de equilibrio a largo plazo para N_t y h_t, que llamaremos N^* y h^* pueden ser directamente obtenidas de este sistema. Dichas soluciones son:

$$N^* = \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \left(\frac{w_t^0 \cdot b \cdot (\sigma - 1}{(f_t + w_t^0)}\right)^{1/\sigma}, \text{ y} \tag{5}$$

$$h^* = \left(\frac{(f_t + w_t^0)}{w_t^0 \cdot b \cdot (\sigma - 1)}\right)^{1/\sigma} \tag{6}$$

Como puede comprobarse, el valor de equilibrio a largo plazo del empleo, N^*, es una función creciente de Q_t^0, w_t^0 y b, así como una función decreciente de f_t. Por el contrario, la tasa de utilización óptima del empleo, h^*, que resulta ser independiente de Q_t^0, es una función decreciente

5. Las condiciones suficientes se satisfacen, en efecto, si la forma cuadrática: $H_{NN} \cdot H_{\dot{N}\dot{N}} - H^2_{N\dot{N}}$ es definida positiva, es decir, si es:

$$\lambda_t^0 \cdot \alpha \cdot \frac{Q_t^0}{N_t^2} \cdot e^{-rt} \cdot \gamma > 0$$

despejado el valor λ^0_t del sistema formado por las ecuaciones de Euler, la anterior desigualdad se transforma en.

$$(e^{-rt})^2 \cdot w_t^0 \cdot b \cdot \sigma h_t^0 \cdot$$

condición que evidentemente se satisface si $\gamma > 0$.

de w_t^0 y b, y creciente de f_t.[6] La expresión (6) indica, por otra parte, que la tasa de utilización óptima de la mano de obra es aquella para la cual el coste medio por hora trabajada es mínimo,[7] siendo perfectamente posible que exista una demanda positiva de horas extraordinarias en la posición de equilibrio a largo plazo de la tasa de utilización.[8]

El sendero temporal de expansión de N_t hacia N_t^* puede ser ahora obtenido a partir de (4.a) - (4.c). En efecto, despejando λ_t^0 en (4.b) y h_t en (4.c), obtendremos, realizando las operaciones convenientes, la siguiente expresión:

$$\gamma\ddot{N}_t - r\gamma\dot{N}_t + J \cdot \frac{1}{N_t^{\sigma}} - (\dot{f}_t + w_t^0) = 0, \tag{7}$$

donde $J = \dfrac{Q_t^{0\sigma/\alpha}}{B^{\sigma/\alpha}} \cdot w_t^0 \cdot b \cdot (\sigma - 1)$

La expresión (7), representativa de una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden, es no lineal en N_t. Por aplicación del teorema de Taylor, la ecuación (7) puede ser no obstante linealizada en la cercanía de la solución estacionaria para N_t. La ecuación diferencial no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes que en este caso se obtiene es —ver Apéndice I— la siguiente:

$$\gamma\ddot{N}_t - r\gamma\dot{N}_t - \Theta_1 N_t + K_1 = 0, \tag{8}$$

donde $\Theta_1 = \dfrac{\sigma J}{N^{*(1+\sigma)}}$, y donde $K_1 = \dfrac{(1+\sigma)J}{N^{*\sigma}} - (f_t + w_t^0)$.

La solución estacionaria de (8) es:

$$N^e = \frac{(1+\sigma)J}{\Theta_1 N^{*\sigma}} - \frac{(f_t + w_t^0)}{\Theta_1}$$

Por otra parte, las raíces características correspondientes a la ecuación característica de (8) son:

6. Un análisis tanto de la significación teórica como de la repercusión práctica de estos resultados, puede encontrarse en *Blanco Losada, M. B.* (1977).

7. Ver *Wickens, M. R.* (1974) y *Blanco Losada, M. B.* (1976) para una demostración de este resultado desde distintas perspectivas optimizadoras.

8. Un gran número de autores —ver, por ejemplo, *Brechling, F. P. R.* (1965), *Ball, R. J.* y *St. Cyr, E. B. A.* (1966), *Fair, R. C.* (1969) y *Wickens, M. R.* (1974)— entre los que también se incluye el autor de este artículo, han identificado repetidamente la tasa de utilización óptima del empleo con el nivel de horas trabajadas correspondiente a la jornada «normal» de trabajo. Como se hace ver en *Blanco Losada, M. B.* (1977), este hecho no tiene por qué ocurrir necesariamente aún en el supuesto de que la elasticidad —output de la tasa de utilización sea igual a la del empleo.

$$\lambda_2 = \frac{\gamma r + \{\gamma^2 r^2 + 4\gamma\Theta\}^{1/2}}{2\gamma}$$

$$\lambda_1 = \frac{\gamma r - \{\gamma^2 r^2 + 4\gamma\Theta\}^{1/2}}{2\gamma}$$

Como $\Theta_1 > 0$, será $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$.
Dado que $N^e = N^*$ —ver Apéndice II— la solución general de (8) es la siguiente:

$$N_t = Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} + \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \left(\frac{w_t^0 \cdot b \cdot (\sigma - 1)}{f_t + w_t^0}\right)^{1/\sigma} \quad (9)$$

De las condiciones iniciales se obtiene:

$$N_0 = C + D + \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \left(\frac{w_t^0 \cdot b \cdot (\sigma - 1)}{f_t + w_t^0}\right)^{1/\sigma} \quad (10)$$

, y,

$$N^* = \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \left(\frac{w_t^0 \cdot b \cdot (\sigma - 1)}{f_t + w_t^0}\right)^{1/\sigma} \quad (11)$$

Para que se cumpla la condición de transversalidad tendrá que ocurrir que $N_t \rightarrow N^*$ cuando $t \rightarrow \infty$. Como $\lambda_1 > 0$, esta condición se satisface si $C = 0$, de donde resulta, teniendo en cuenta la (10), que $D = N_0 - N^*$. La solución particular de (8) es, entonces:

$$N_t = (N_0 - N_*) \cdot e^{\lambda_2 t} + N^* \quad (12)$$

ecuación que define el sendero de expansión de N_0 hacia N^* cuando Q_t^0, w_t^0, b y f_t toman valores dados.

Procediendo de igual forma que para N_t, el sendero de expansión para h_t puede ser también obtenido de (4.a) — (4.c). La ecuación diferencial lineal[9] no homogénea de segundo orden representativo de dicho sendero temporal de expansión es —ver Apéndice III— la siguiente:

$$\gamma\ddot{h}_t - r\gamma\dot{h}_t - \Theta_2 h_t - K_2 = 0 \quad (13)$$

9 Como para el caso de N_t, los términos no lineales han sido linealizados en la cercanía de la solución estacionaria h^*.

donde $\Theta_2 = \dfrac{\sigma(\sigma - 1) \cdot w_t^0 \cdot b \cdot h^{*(t+\sigma)}}{\left(\dfrac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha}}$, y donde

$$K_2 = \frac{(1 - \sigma)(\sigma - 1 \cdot w_t^0 \cdot b \cdot h^{*\sigma} - (f_t + w_t)}{\left(\dfrac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \dfrac{1}{h^{*2}}}$$

Al ser $\Theta_1 = \Theta_2$ —ver Apéndice IV— las ecuaciones diferenciales (8) y (13) tienen la misma ecuación característica y, por tanto, las mismas raíces características. Por otra parte, la solución estacionaria de (13) es:

$$h^e = -\frac{k_2}{\Theta_2},$$

pudiendo demostrarse —ver Apéndice V— que también es $h^e = h^*$.

La solución particular estable que define el sendero de expansión de h_0 hacia h^* es, entonces:

$$h_t = h_0 - h^*) \cdot e^{\lambda_2 t} + h^* \tag{14}$$

Para valores dados de Q_t^0, w_t^0, b y f_t, la ecuación (8) determina, según vimos, el sendero temporal de expansión de N_o hacia N^*. Asimismo, la (14) determina el sendero temporal de expansión de h_o hacia h^* para valores dados de w_t^0, b y f_t.

Supongamos que inicialmente el sistema está en una situación de equilibrio estacionario en la que, por definición, es $N_o = N^*$ y $h_o = h^*$. Una elevación de f_t implica —ver las formas reducidas (5) y (6)— un menor nivel de equilibrio a largo plazo para N, que llamaremos N^{**}, y un mayor nivel de equilibrio a largo plazo para h, que llamaremos h^{**}. Como $\lambda_2 < 0$, el sendero de expansión para N —ver ecuación (12)— viene dado por una constante más un exponencial decreciente. Por la misma razón, el sendero de expansión para h viene dado por una constante menos un exponencial decreciente. Análogas consideraciones, aunque de signo distinto, podrían ser hechas con referencia a cambios que pudieran tener lugar en w_t^0 o b.

Sin embargo, lo que a nosotros nos interesa es averiguar lo que ocurre con N_t y h_t cuando el output varía, ya que ésta es la situación que origina el problema que nos ocupa. La pregunta relevante es, entonces, ¿cuáles son los efectos dinámicos sobre N_t y sobre h_t debidos a un cambio en Q_t^0? Contrariamente a lo que ocurre en el supuesto que acabamos de analizar, en el que aumentos o descensos en f_t inducen simultáneamente desplazamientos de signo contrario en N^* y h^*, el valor de equilibrio h^* no está afectado por Q_t^0. Supongamos ahora que partimos, como antes, de una situación de equilibrio estacionario inicial con $N_o = N^*$ y $h_o = h^*$ para $Q_t = Q_t^0$. Cuando Q_t se desplaza de Q_t^0 a Q_t^1, el nuevo valor de equilibrio de N será $N^{***} > N^*$. El sendero de expansión de N^* hacia N^{***} viene dado, naturalmente, por (12), de manera que dicho sendero es una constante menos un exponencial decreciente. Ahora bien, dado que el nivel de equilibrio a largo plazo h^* no está afectado por Q_t, ¿cuál es el sendero de expansión para h_t? Si $h_t = h^*$ mientras $N^* < N^{***}$ es evidente que la función de producción (1) no se cumple. Como (1) debe satisfacerse en todo momento,[10] necesariamente habrá de ser $h_t > h^*$ mientras $N_t < N^{***}$. Para determinar el sendero de expansión de h_t mientras tiene lugar el proceso de adaptación de N^* a N^{***} procedemos, simplemente del siguiente modo:

Dado que la función de producción debe satisfacerse en todo momento, se tendrá:

$$Q_t^1 = B \cdot (N_t \cdot h_t)^\alpha \tag{15}$$

de donde resulta:

$$h_t = \left(\frac{Q_t^1}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{1}{N_t} \tag{16}$$

Luego el sendero de expansión para h_t es, teniendo en cuenta la (12):

$$h_t = \left(\frac{Q_t^1}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{1}{(N^* - N^{***}) \cdot e^{\lambda_2 t} + N^{***}} \tag{17}$$

El denominador de (17) es, como sabemos, una constante menos un exponencial decreciente, es decir, una función creciente de t pero que crece menos que proporcionalmente desde $t = 0$ y que se satura cuando $t \to \infty$. En consecuencia, h_t es una función decreciente de t que decrece menos que proporcionalmente desde $t = 0$ y que también se satura cuando $t \to \infty$. Evidentemente, cuando $t \to \infty$ resulta que $N^* = N^{***}$, por lo cual la (17) se convierte en:

$$h_t = \left(\frac{Q_t^1}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{1}{N^{***}} \tag{18}$$

10. Este es ciertamente un caso en el que «there is a necessity for a static production function constraint in a dynamic optimization theory». Un planteamiento que conduce a resultados contrarios a éste, puede verse en *Treadwey, A. B.* (1970).

de lo que se deduce, teniendo en cuenta la (5), que $h_t = h^*$ sólo cuando $N_t = N^{***}$.

III. CONCLUSIONES

Las principales conclusiones que se obtienen de nuestro análisis son las siguientes:

I) Bajo criterios de minimización de costes, la presencia de costes de ajuste asociados al cambio en el stock de empleo es causa de que el nivel de empleo no se ajuste de manera instantánea al nuevo nivel de equilibrio inducido por un cambio en el output.

II) Mientras el proceso de adaptación del empleo no se agota, la tasa de utilización de la mano de obra desempeña un papel amortiguador que permite el cumplimiento de las restricciones impuestas por la función de producción durante el período de ajuste.

III) A diferencia de lo que ocurre en los modelos de maximización de beneficios, la tasa de utilización del empleo sólo estará en equilibrio cuando el stock de empleo esté también en equilibrio. Mientras el nivel «actual» de empleo es inferior (superior) al de equilibrio a largo plazo, la tasa de utilización de la mano de obra estará situada también a un nivel superior (inferior) al de equilibrio a largo plazo.

IV) A corto plazo, los mayores requerimientos de servicios del factor trabajo inducidos por un aumento del output es de esperar se satisfagan por la vía de una más intensiva utilización de la mano de obra. A más largo plazo, la adaptación del stock de empleo a su nivel óptimo debería permitir un gradual retorno de la tasa de utilización de la mano de obra a su nivel normal o de equilibrio.

Facultad de Económicas
Universidad Autónoma de Madrid

APENDICE I

Sea $G(N_t) = J \cdot \dfrac{1}{N_t^{\sigma}}$

Aplicando el teorema de Taylor y tomando los dos primeros términos del desarrollo resultante, se tiene:

$$G(N_t) = J \cdot \frac{1}{N^{*\sigma}} - \frac{\sigma N^{*\sigma-1} \cdot J}{(N^{*\sigma})^2}(N_t - N^*),$$

es decir:

$$G(N_t) = \frac{(1+\sigma)\cdot J}{N^{*\sigma}} - \frac{\sigma J}{N^{*(1+\sigma)}} \cdot N_t ,$$

por lo que la expresión (7) del texto se convierte en:

$$\gamma \ddot{N}_t - r\gamma \dot{N}_t - \frac{\sigma \cdot J}{N^{*(1+\sigma)}} N_t + \frac{(1+\sigma)\cdot J}{N^{*\sigma}} - (f_t + w_t^0) = 0$$

APENDICE II

La solución estacionaria de (8) es:

$$N^e = \frac{(1+\sigma)\cdot J}{\Theta_1 \cdot N^{*\sigma}} - \frac{(f_t + w_t^0)}{\Theta_1} \qquad \text{(I)}$$

Sustituyendo Θ_1 por el valor que para esta variable aparece en el texto, se tiene:

$$N^e = \frac{(1+\sigma)}{\sigma} \cdot N^* - \frac{(f_t + w_t^0)\, N^{*(1+\sigma)}}{\sigma \cdot J} \qquad \text{(II)}$$

Como J puede también expresarse en términos de N^* de la forma $J = N^{*\sigma} (f_t + w_t^0)$, la (II) se convierte en:

$$N^e = N^* \cdot \left(\frac{1+\sigma}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \right) \qquad \text{(III)}$$

de donde resulta que $N^e = N^*$.

APENDICE III

De (4.c) puede despejarse N_t, obteniéndose:

$$N_t = \left(\frac{Q_t^0}{B} \right)^{1/\alpha} \cdot \frac{1}{h_t} , \qquad \text{(I)}$$

de donde resulta:

$$\dot{N}_t = -\left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{\dot{h}_t}{h_t^2}, \text{ y} \tag{II}$$

$$\ddot{N}_t = \left(\frac{Q^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \left(\frac{2\,\dot{h}_t^2}{h_t^3} - \frac{\ddot{h}_t}{h_t^2}\right) \tag{III}$$

Teniendo en cuenta (I), de (4.b) puede despejarse λ_t^0. Este valor es:

$$\lambda_t^0 = \frac{e^{-rt} \cdot w_t^0 \cdot b \cdot \sigma \cdot h_t^{\sigma} \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{1}{h_t}}{\alpha \cdot Q_t^0} \tag{IV}$$

Sustituyendo ahora (I), (II), (III) y (IV) en (4.a) obtenemos:

$$\gamma \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \left(\frac{2\,\dot{h}_t^2}{h_t^3} - \frac{\ddot{h}_t}{h_t^2}\right) + r \cdot \gamma \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{\dot{h}_t}{h_t^2} - \tag{V}$$

$$-(f_t + w_t^0 + w_t^0 \cdot b \cdot h_t^{\sigma}) + w_t^0 \cdot b \cdot \sigma \cdot h_t^0 = 0$$

es decir:

$$\gamma \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{2\,h_t^2}{h_t^3} - \gamma \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{h_t}{h_t^2} + r \cdot \gamma \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{h_t}{h_t^2} +$$

$$+ (\sigma - 1) \cdot w_t^0 \cdot b \cdot h_t^{-\sigma} - (f_t + w_t^0) = 0 \tag{VI}$$

Tomando los dos primeros términos del desarrollo resultante al aplicar el teorema de Taylor a esta función, se obtiene:

$$G(\ddot{h}_t, \dot{h}_t, h_t) = \gamma \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{2\,\dot{h}^{*2}}{h^{*3}} - \gamma \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{\ddot{h}^*}{h^{*2}} +$$

$$+ r \cdot \gamma \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{\dot{h}^*}{h^{*2}} + (\sigma - 1) \cdot w_t^0 \cdot b \cdot h^{*\sigma} - (f_t + w_t^0) +$$

$$+ \left(\frac{\delta G}{\delta \ddot{h}_t}\right)_{\ddot{h}_t = \ddot{h}^*} (\ddot{h}_t - \ddot{h}^*) + \left(\frac{\delta G}{\delta \dot{h}_t}\right)_{\dot{h}_t = \dot{h}^*} (\dot{h}_t - \dot{h}^*) + \left(\frac{\delta G}{\delta h_t}\right)_{h_t = h^*} (h_t - h^*)$$

Teniendo en cuenta que $\dot{h}^* = 0$ y $\ddot{h}^* = 0$, las derivadas parciales toman los valores:

$$\left(\frac{\delta G}{\delta h_t}\right)_{\ddot{h}_t = \ddot{h}^*} (\ddot{h}_t - \ddot{h}^*) = -\gamma \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{1}{h^{*2}} \cdot \ddot{h}_t$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta h_t}\right)_{\dot{h}_t = \dot{h}^*} (\dot{h}_t - \dot{h}^*) = r \cdot \gamma \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{v}{h^{*2}} \cdot \dot{h}_t$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta h_t}\right)_{h_t = h^*} (h_t - h^*) = \sigma(\sigma - 1) \cdot w_t^0 \cdot b \cdot h^{*\sigma-1} \cdot h_t - \sigma(\sigma - 1) \cdot w_t^0 \cdot b \cdot h^{*\sigma}$$

y la expresión (vi) se reduce a:

$$-\gamma \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{1}{h^{*2}} \cdot \ddot{h}_t + r \cdot \gamma \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \tag{viii}$$
$$\cdot \frac{1}{h^{*2}} \cdot \dot{h}_t + \sigma(\sigma - 1)\, w_t^0 \cdot b \cdot h^{*\sigma-1} \cdot h_t + (1 - \sigma)(\sigma - 1) \cdot$$
$$\cdot w_t^0 \cdot b \cdot h^{*\sigma} - (f_t + w_t^0) v = 0,$$

es decir:

$$-\gamma \cdot \ddot{h}_t + r \cdot \gamma \cdot \dot{h}_t + \frac{\sigma(\sigma - 1) \cdot w_t^0 \cdot b \cdot h^{*(1+\sigma)}}{\left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha}} \cdot h_t + \tag{ix)}$$
$$+ \frac{(1 - \sigma) \cdot (\sigma - 1) \cdot w_t^0 \cdot h^{*\sigma} - (f_t + w_t^0)}{\left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{1}{h^{*2}}} = 0,$$

expresión que, una vez multiplicada por -1, coincide con la (13) del texto.

APENDICE IV

Teniendo en cuenta la (6), Θ_2 puede ponerse de la forma:

$$\Theta_2 = \frac{\sigma(f_t + w_t^0) \cdot \left(\frac{f_t + w_t^0}{w_t^0 \cdot b \cdot (\sigma - 1)}\right)^{1/\sigma}}{\left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha}} \tag{i}$$

Por otra parte, recordando la definición dada para J, se tiene:

$$\Theta_1 = \frac{\sigma \cdot J}{N^{*(1+\sigma)}} = \frac{\overset{\circ}{\sigma} \cdot \left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha} \cdot w_t^0 \cdot b \cdot (\sigma - 1)}{N^{*(1-\sigma)}} \qquad \text{(ii)}$$

expresión que, teniendo en cuenta la (5), se convierte en:

$$\Theta_1 = \frac{\sigma(f_t + w_t^0) \cdot \left(\frac{f_t + w_t^0}{w_t^0 \cdot b \cdot (\sigma - 1)}\right)^{1/\sigma}}{\left(\frac{Q_t^0}{B}\right)^{1/\alpha}} \qquad \text{(iii)}$$

APENDICE V

Sustituyendo K_2 y Θ_2 por sus valores respectivos, se tiene:

$$h^c = -\frac{(1-\sigma)(\sigma-1) \cdot w_t^0 \cdot h^{*\sigma} - (f_t + w_t^0)}{\frac{1}{h^*} \cdot \sigma(\sigma-1) \cdot w_t^0 \cdot h^{*\sigma}} \qquad \text{(i)}$$

es decir,

$$h^c = h^* \frac{(\sigma-1)^2 \cdot w_t^0 \cdot b \cdot h^{*\sigma} + (f_t + w_t^0)}{\sigma(\sigma-1) \cdot w_t^0 \cdot b \cdot h^{*\sigma}} \qquad \text{(ii)}$$

dę donde resulta,

$$h^c = h^* \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} + \frac{f_t + w_t^0)}{\sigma(\sigma-1) \cdot w_t^0 \cdot b \cdot h^{*\sigma}}\right) \qquad \text{(iii)}$$

y, teniendo en cuenta de nuevo la (6),

$$h^c = h^* \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\right), \qquad \text{(iv)}$$

de lo que se deduce que $h^c = h^*$.

BIBLIOGRAFIA

BALL, R. J. y ST. CYR, E. B. A.: «Short-term employment functions in British manufacturing industry.» *The Review of Economic Studies,* Vol. 33, n.º 95, July 1966.

BLANCO LOSADA, M. A.: «Empleo y capacidad productiva en la economía española.» Comunicación presentada al «Seminario sobre modelos econométricos de la economía española», Banco de España. Madrid, Noviembre 1976.

«La función de salarios y la determinación de la tasa óptima de utilización de la mano de obra.» Documento interno del Departamento de Teoría Económica. Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Autónoma. Madrid, 1977.

BRECHLING, F. P. R.: «The relationship between output and employment in British manufacturing industries.» *Review of Economic Studies,* Vol. 32, July, 1965.

COHEN, R. M. y HICKMAN, B. G.: «Constrained joint estimation of factor demand and production functions.» *The Review of Economics and Statistics,* August, 1970.

«An annual growth model of the U. S. Economy.» North-Holland, Amsterdam, 1976.

FAIR, R. C.: «The short-run demand for workers and hours.» North-Holland, Amsterdam, 1969.

JUNANKAR, P. N.: «Investment: Theories and Evidence.» MacMillan Studies in Economics, 1972.

KNOX, A. D.: «El principio del acelerador y la teoría de la inversión.» *Economica,* Vol. 19, August, 1952. Reimpreso «Lecturas de Macroeconomía», CECSA, Barcelona, 1971.

KUH, E.: «Income distribution and employment over the business cycle.» En «The Brookings Quarterly Econometric Model of the United States.» North-Holland, Amsterdam, 1965.

LORANGER, J. F.: «La théorie néo-classique de la demande de capital: problemes théoriques de spécification.» Cahier n.º 7402. Département des Sciences Economiques. Université de Montréal. Montréal, 1974.

MEADE, J. E.: «The controlled economy.» George Allen and Unwin Limited. London, 1971.

NADIRI, M. I. y ROSEN, S.: «Interrelated factor demand functions.» *The American Economic Review,* Vol. 59, n.º 4, 1969.

«A disequilibrium model of demand for factors of production.» *The American Economic Review,* Vol. 64, n.º 2, 1974.

«A disequilibrium model of demand for factors of production.» NBER. New York, 1973.

OI, W. Y.: «Labor as a quasi-fixed factor.» *Journal of Political Economy,* 70, 1962.

ROSEN, S.: «Shortrun employment variation on class-l rail roads in the U.S. 1947-1963.» *Econometrica,* Vol. 36, N.º 3-4, July-October, 1968.

«On the interindustry wage and hours structure.» *Journal of Political Economy,* Vol. 77, n.º 2, March-April, 1969.

TINSLEY, P. A.: «A variable adjustment model of labor demand», *International Economic Review,* Vol. 12, 1971.

TREADWEY, A. B.: «Adjustment costs and variable inputs in the theory of the competitive firm.» *Journal of Economic Theory,* Vol. 2, n.º 4, December, 1970.

WICKENS, M. R.: «Towards a theory of the labour market», *Economica,* Vol. 41, August, 1974.